

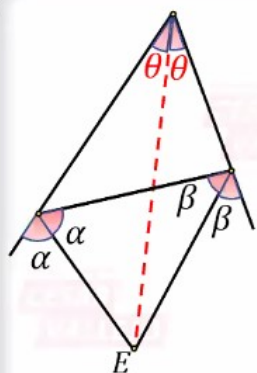
PROBLEMA 1

En un cuadrilátero convexo $ABCD$, las bisectrices de los ángulos ABC y BCD se intersectan en E y las bisectrices exteriores de los ángulos A y D se intersectan en F . Si $m\angle BAD = 72^\circ$, calcule la $m\angle EFD$.

A) 32°
D) 46°

B) 36°

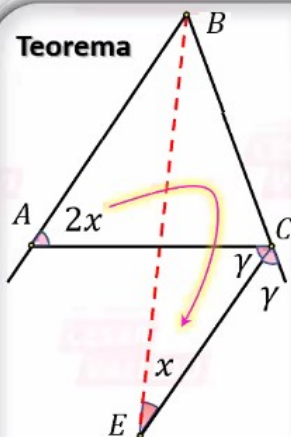
C) 18°
E) 72°



Del gráfico:

E es excentro

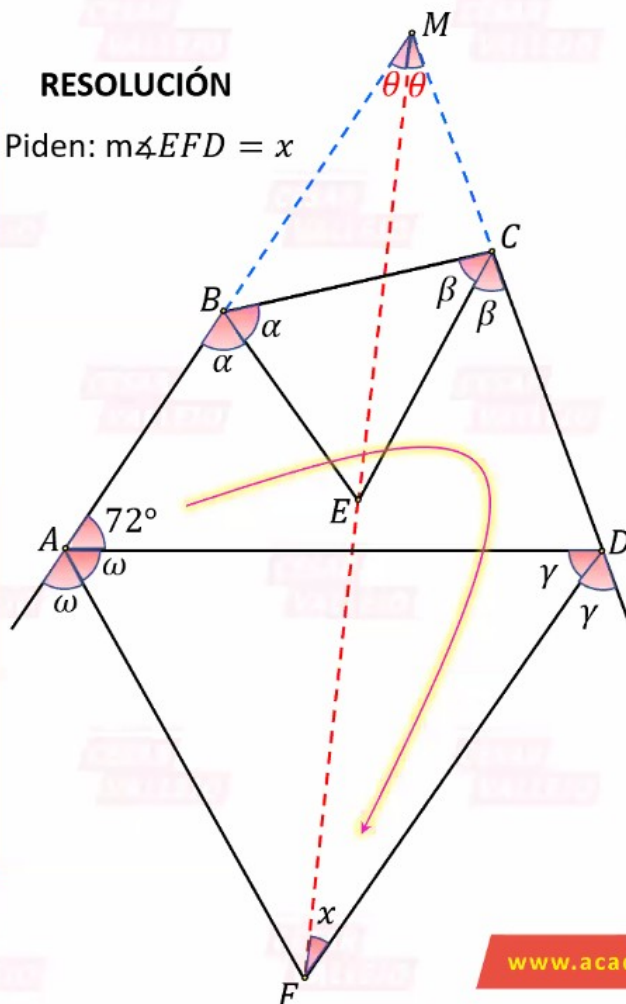
Teorema



$$m\angle BEC = \frac{m\angle BAC}{2}$$

RESOLUCIÓN

Piden: $m\angle EFD = x$



Dato: $m\angle BAD = 72^\circ$

- En $\triangle BMC$, E es excentro
- En $\triangle AMD$, F es excentro
→ M , E y F son colineales
- Teorema en $\triangle AMD$

$$x = \frac{m\angle MAD}{2}$$

$$x = \frac{72^\circ}{2}$$

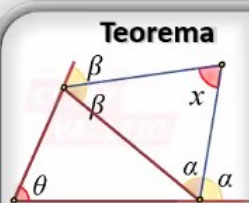
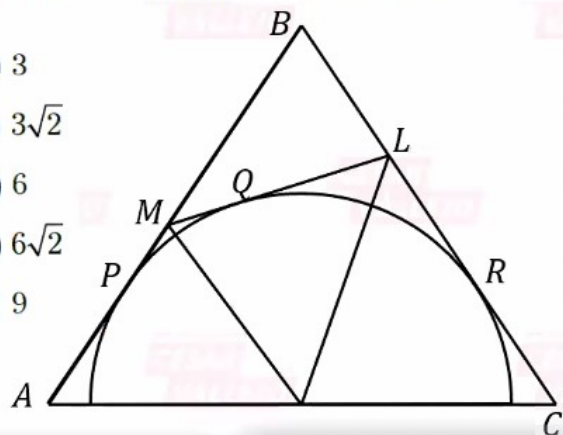
$$\therefore x = 36^\circ$$

Clave: B

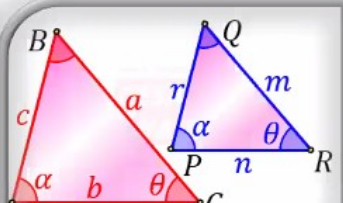
PROBLEMA 2

Según el gráfico, P , Q y R son puntos de tangencia, $AB=BC$ y $(AM)(LC)=18$. Calcule AC

- A) 3
B) $3\sqrt{2}$
C) 6
D) $6\sqrt{2}$
E) 9



$$x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$



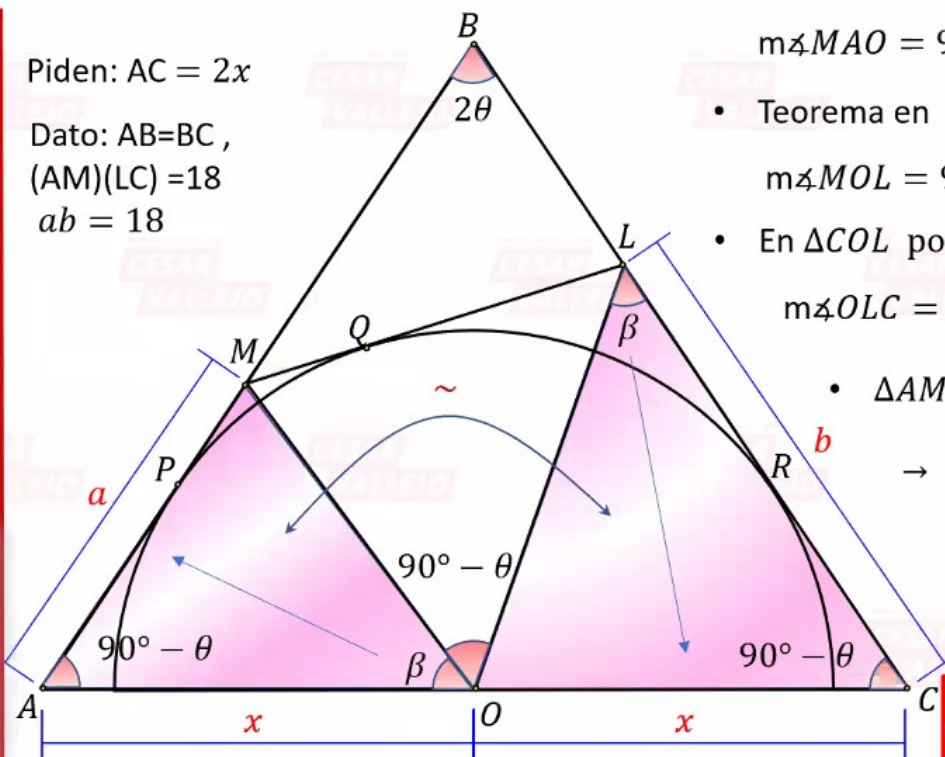
$\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{r} = \frac{1}{k}$$

RESOLUCIÓN

Piden: $AC = 2x$

Dato: $AB=BC$,
 $(AM)(LC)=18$
 $ab = 18$



- En $\triangle ABC$ es isósceles
 $m\angle MAO = 90^\circ - \theta = m\angle OCL$
- Teorema en $\triangle MBL$
 $m\angle MOL = 90^\circ - \frac{2\theta}{2}$
- En $\triangle COL$ por angulo exterior
 $m\angle OLC = \beta = m\angle AOM$

$\triangle AMO \sim \triangle COL$

$$\rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad x^2 = ab$$

$$x^2 = 18$$

$$x = 3\sqrt{2}$$

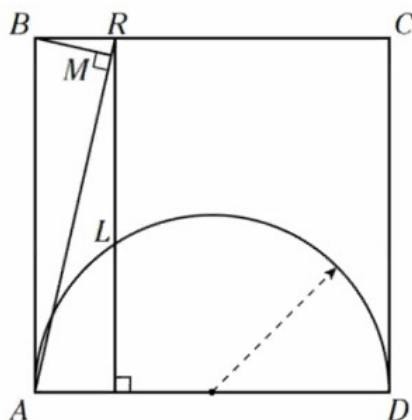
$$\therefore AC = 6\sqrt{2}$$

Clave: D

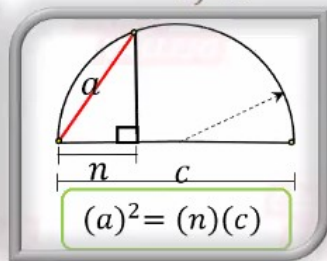
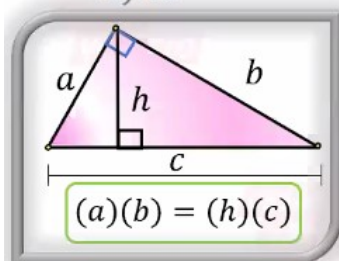
www.academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

Según el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado, $AL=6$ y $BM=2$. Calcule AR .

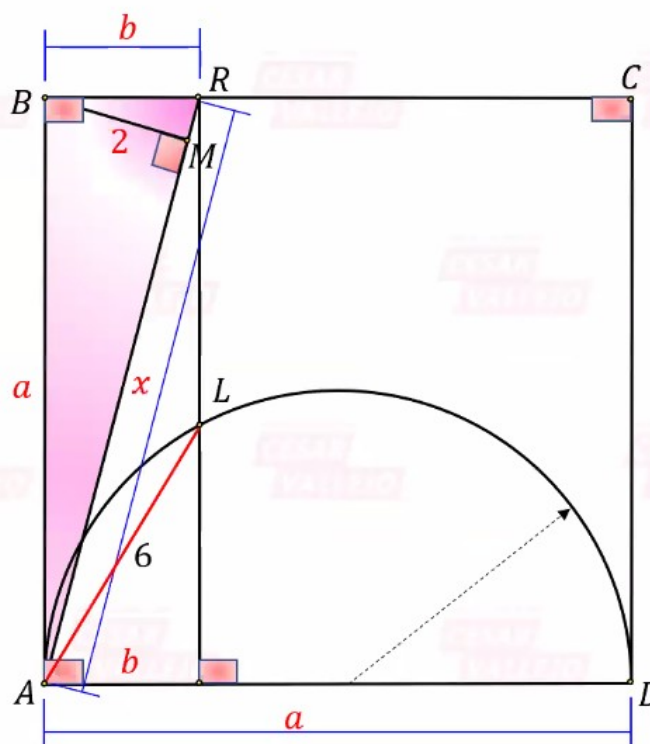


- A) $4\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{10}$ C) 12
D) 16 E) 18



Piden: $AR = x$

Dato: $AL=6$, $BM=2$



- Por teorema producto de catetos en $\triangle ABR$

$$2 \cdot x = a \cdot b \quad \cdots (i)$$

- Por teorema en 

$$6^2 = a \cdot b \quad \dots (ii)$$

- Reemplazar (ii) en (i)

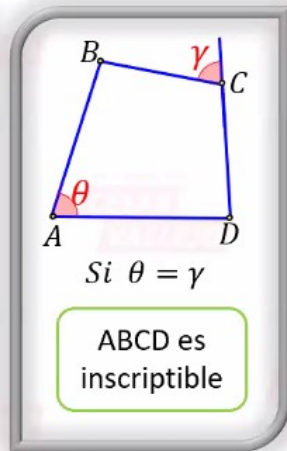
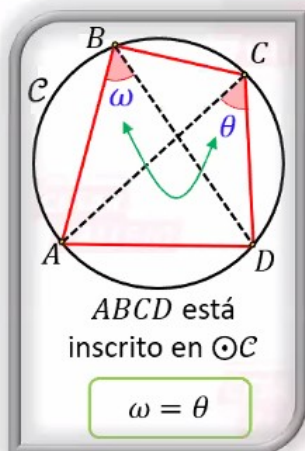
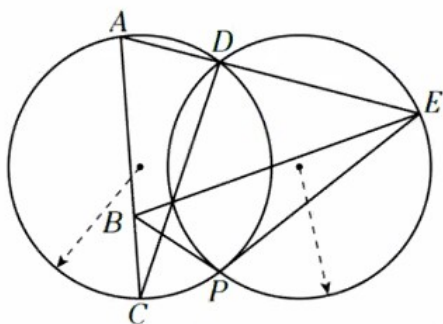
$$2 \cdot x = 36$$

$$\therefore x = 18$$

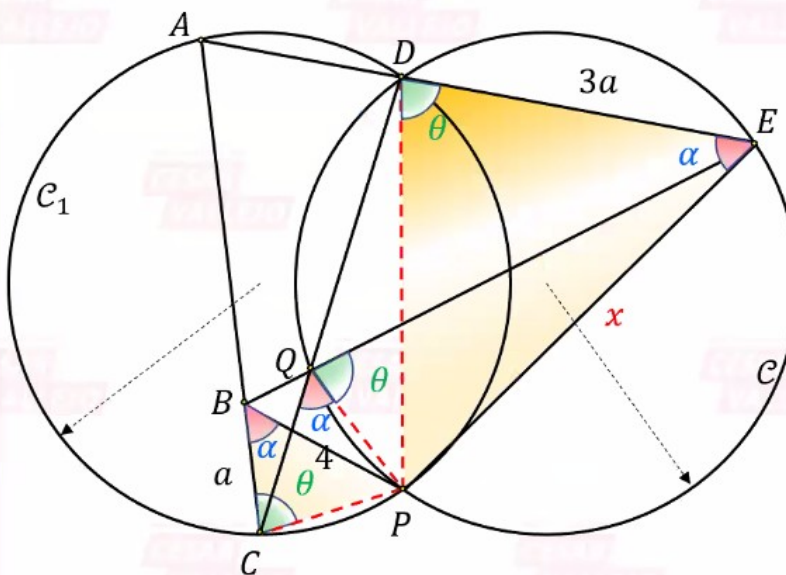
Clave: E

En el gráfico, $BP=4$ y $DE=3BC$. Calcule PE .

- A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) 12



Piden: $PE = x$



Dato: BP=4 , DE = 3BC

- Se observa $\triangle PQDE$ esta inscrito en $\mathcal{C}$
 $m\angle PQE = \theta = m\angle PDE$
- Se observa $\triangle ADPC$ esta inscrito en $\mathcal{C}_1$
 $m\angle PDE = \theta = m\angle ACP$
- $\triangle BQPC$ es inscriptible
 $m\angle CBP = \alpha = m\angle CQP$
- $\triangle CBP \sim \triangle DEP$
 $\rightarrow \frac{a}{3a} = \frac{4}{x}$

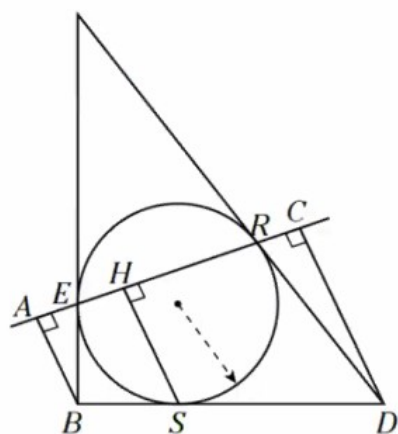
$$\therefore x = 12$$

Clave: E

CICLO REPASO UNI

PROBLEMA 8

Según el gráfico, E, R y S son puntos de tangencia, $AB=a$ y $CD=b$. Calcule SH .



A) $\frac{2ab}{a+b}$

B) $\frac{ab}{a+b}$

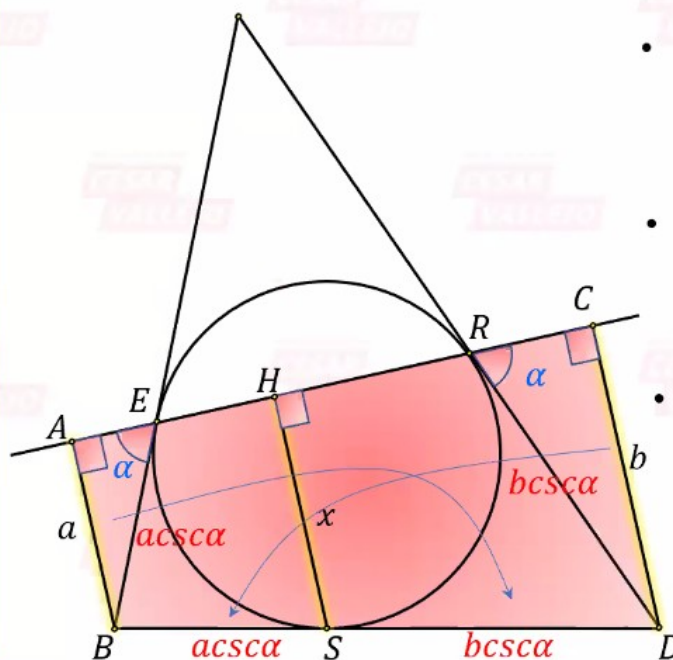
C) $\frac{a+b}{ab}$

D) $\frac{a-b}{a+b}$

E) $\frac{ab}{a^2+b^2}$

RESOLUCIÓN

Piden: $SH = x$



Dato: $AB = a$; $CD = b$

- Por resolución de triángulos

$$\triangle BAE: BE = a \csc \alpha$$

$$\triangle RCD: RD = b \csc \alpha$$

- Teorema en circunferencia

$$BE = BS = a \csc \alpha$$

$$RD = SD = b \csc \alpha$$

- Teorema

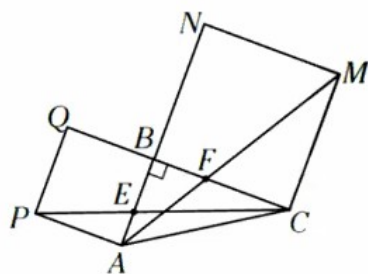
$$x = \frac{a(b \csc \alpha) + b(a \csc \alpha)}{a \csc \alpha + b \csc \alpha}$$

$$\therefore x = \frac{2ab}{a+b}$$

Clave: A

PROBLEMA 9

En el gráfico, $ABQP$ y $BCMN$ son cuadrados. Si $EB = a$, calcule EF .



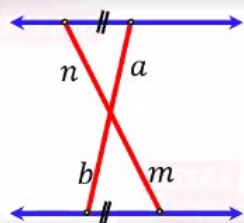
A) $a\sqrt{2}$

B) a

C) $\frac{a}{2}$

D) $\frac{a}{3}$ (caso II)

E) $2a$

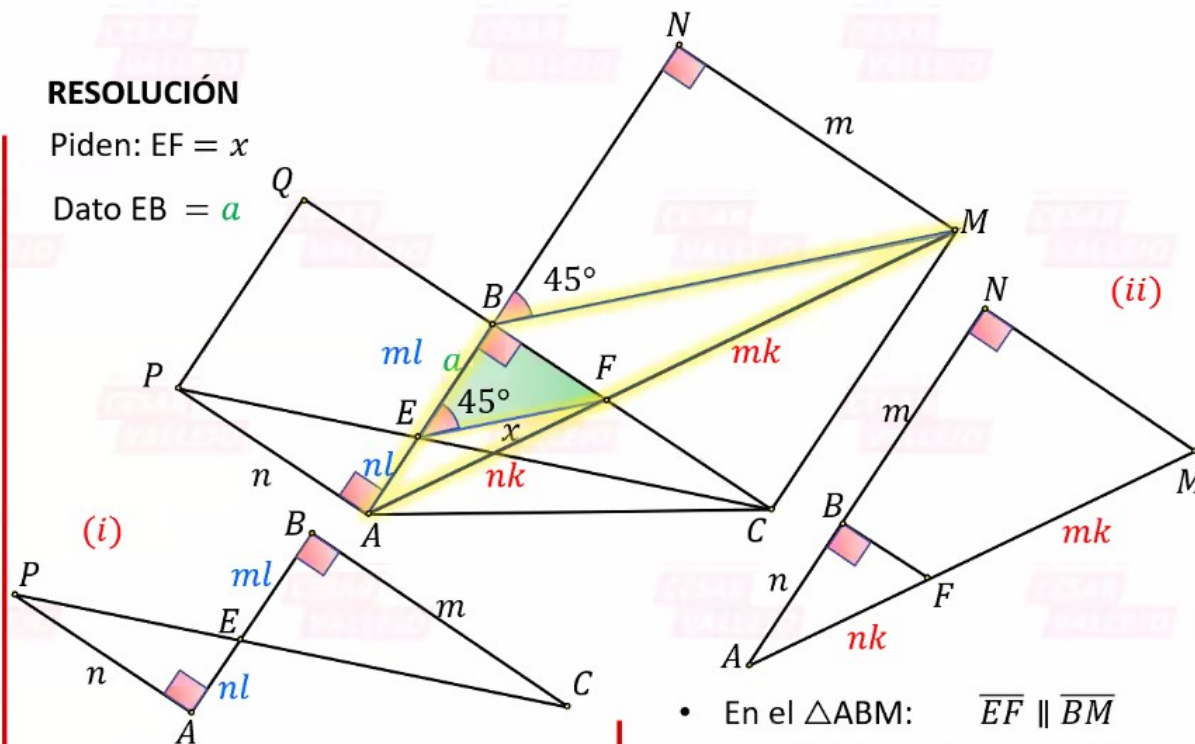


Cororario de thales

Se cumple

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$

RESOLUCIÓN

Piden: $EF = x$ Dato $EB = a$ 

- Corolario de Thales en (i) y (ii)

$$\frac{AE}{EA} = \frac{n}{m} \quad \frac{AF}{FM} = \frac{n}{m}$$

$$\rightarrow \frac{AE}{EA} = \frac{AF}{FM}$$

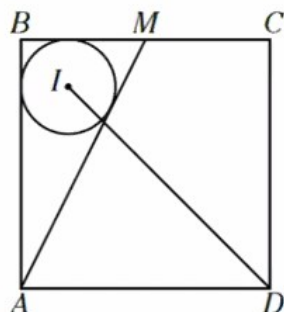
- En el $\triangle ABM$: $\overline{EF} \parallel \overline{BM}$
 $m\angle NBM = 45^\circ = m\angle BEF$
- $\triangle EBF$ es notable de 45°

$$\therefore x = a\sqrt{2}$$

Clave: A

PROBLEMA 10

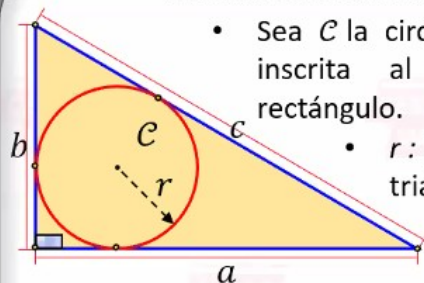
Si $ABCD$ es un cuadrado, I es incentro del triángulo ABM , $BM=MC$ y $AB=20$. Calcule ID .



- A) $5\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)$
- B) $5\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)$
- C) $\sqrt{2}$
- D) $10\sqrt{2}$
- E) $5\sqrt{2}$

Teorema de Poncelet

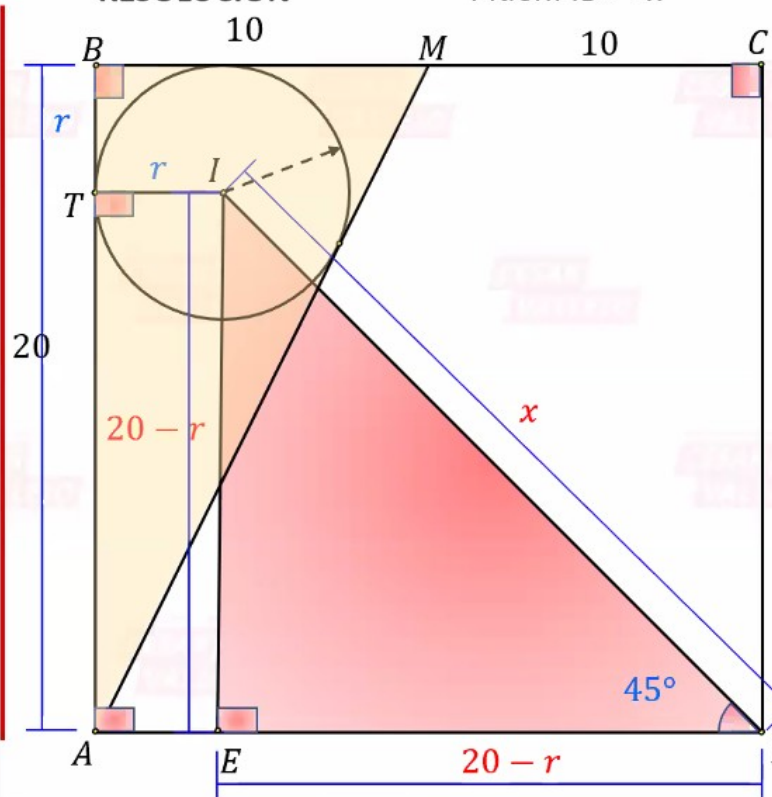
- Sea C la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo.
- r : Inradio del triángulo.



Se cumple:

$$a + b = c + 2r$$

RESOLUCIÓN

Piden: $ID = x$ Dato: $BM = MC = 10$ 

- $IE = 20 - r = ED$
- $\triangle IED$ es notable de 45°
 $\rightarrow x = (20 - r)\sqrt{2} \dots (i)$
- teorema de Poncelet en $\triangle ABM$
 $20 + 10 = 2r + 10\sqrt{5}$
 $r = 5(3 - \sqrt{5})$
- Reemplazando en (i)

$$x = (20 - 5(3 - \sqrt{5}))\sqrt{2}$$

$$\therefore x = 5\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)$$

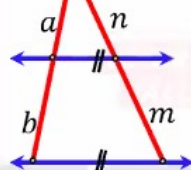
Clave: E

PROBLEMA 11

En un triángulo ABC ($AB < BC$) se traza la bisectriz exterior BQ luego se trazan $AT \perp BQ$ y $CH \perp BQ$, tal que T y H están en la recta QB . Si $QT=3$ y $TB=2$, calcule BH .

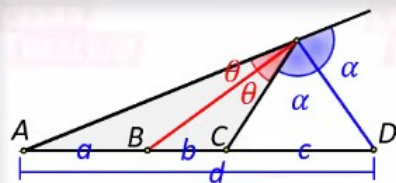
- A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) $2\sqrt{6}$

Corolario de Thales



Se cumple

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$



Se cumple

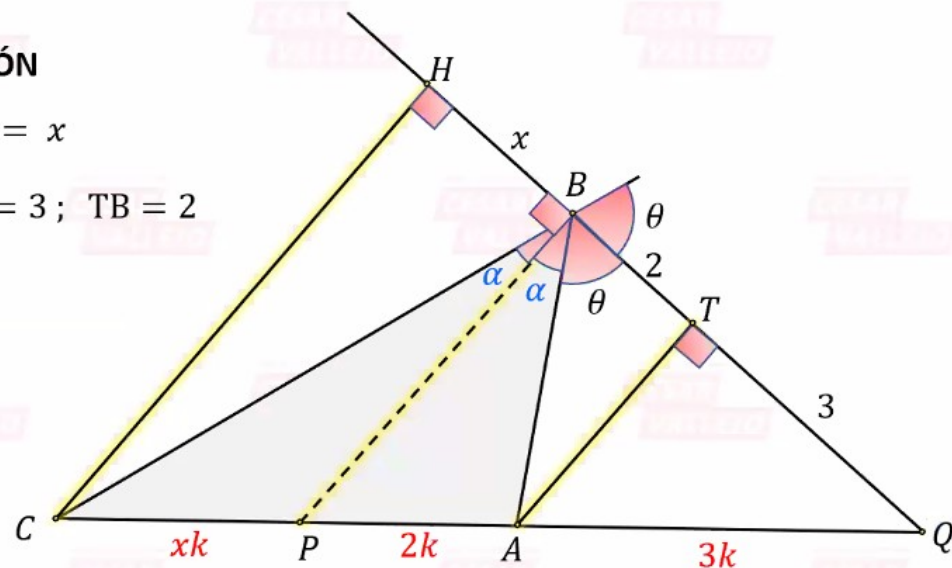
$$\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$$

$\therefore A, B, C$ y D son puntos armónicos.

RESOLUCIÓN

Piden: $BH = x$

Dato: $QT = 3$; $TB = 2$



- Trazar $\overline{BP} \perp \overline{BH} \rightarrow \overline{BP}$ es bisectriz del $\angle ABC$
- Por Corolario de Thales en $\triangle CHQ \rightarrow CP = xK$; $PA = 2k$;
 $AQ = 3k$
- C, P, A y Q forman una cuaterna armónica

$$\rightarrow \frac{xk}{2k} = \frac{k(x+5)}{3k}$$

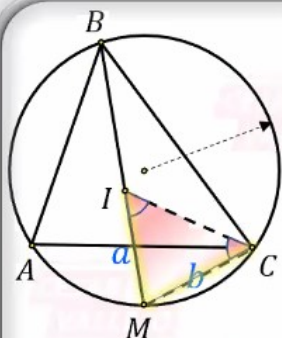
$$\therefore x = 10$$

Clave: D

PROBLEMA 12

Dado un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, $\overline{BI}$ interseca al lado $\overline{AC}$ en L y a la circunferencia en M . Si I es incentro de ABC , $BI=3$, $IL=2$. Calcule LM .

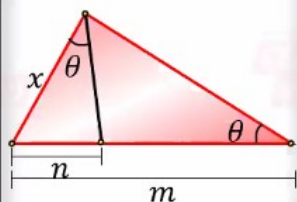
- A) 5 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{6}$ E) 4



Si I es incentro del $\triangle ABC$

$\triangle IMC$ es isósceles

Teorema

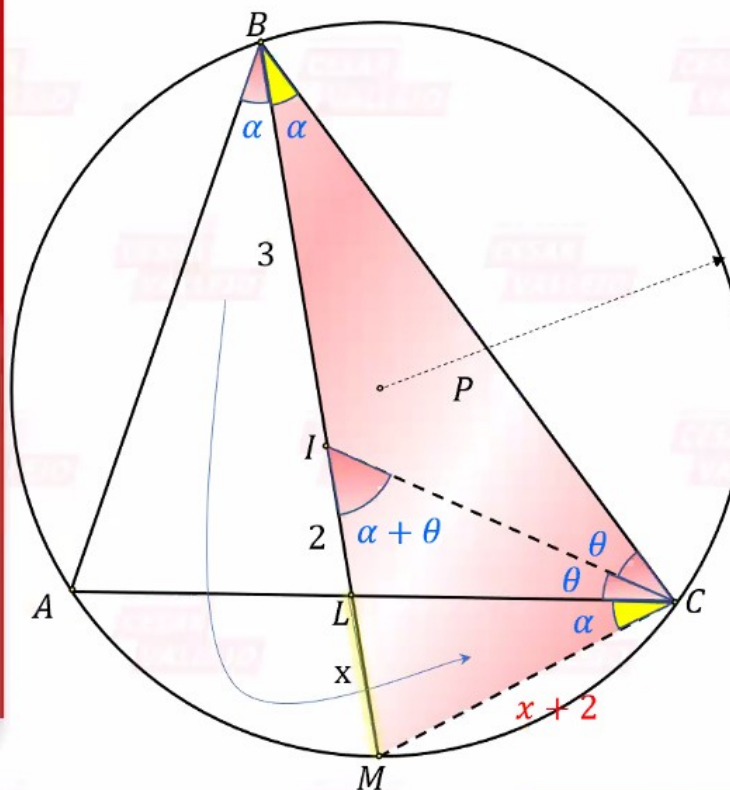


Se cumple

$$x^2 = (n)(m)$$

RESOLUCIÓN

Piden: $LM = x$



Dato: I es incentro del $\triangle ABC$

$$BI = 3 ; IL = 2$$

- Trazar $\overline{CI}$
 $\rightarrow m\angle ICB = m\angle LCI = \theta$
- Por ángulo inscrito
 $\rightarrow m\angle ABM = m\angle ACM = \alpha$
- $\triangle ABC$ es isósceles
 $\rightarrow IM = MC = x + 2$
- Teorema de semejanza en $\triangle MBC$

$$(x + 2)^2 = x(5 + x)$$

$$\therefore x = 4$$

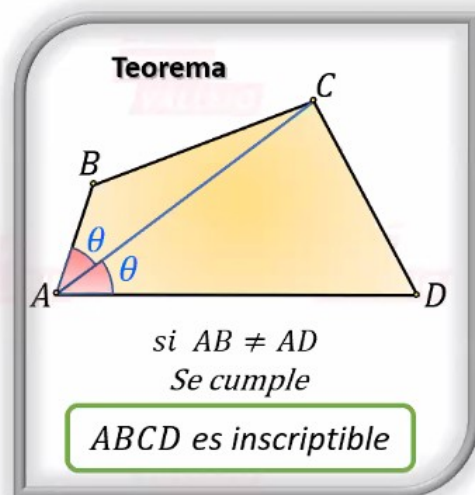
Clave: E

PROBLEMA 13

En un cuadrilátero convexo $ABCD$, $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ son bisectrices del ángulo BAC y de CDA respectivamente, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$, $OB = OC$, $m\angle CAD \neq m\angle BDA$. Calcule $m\angle COD$.

- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 74° E) 53°

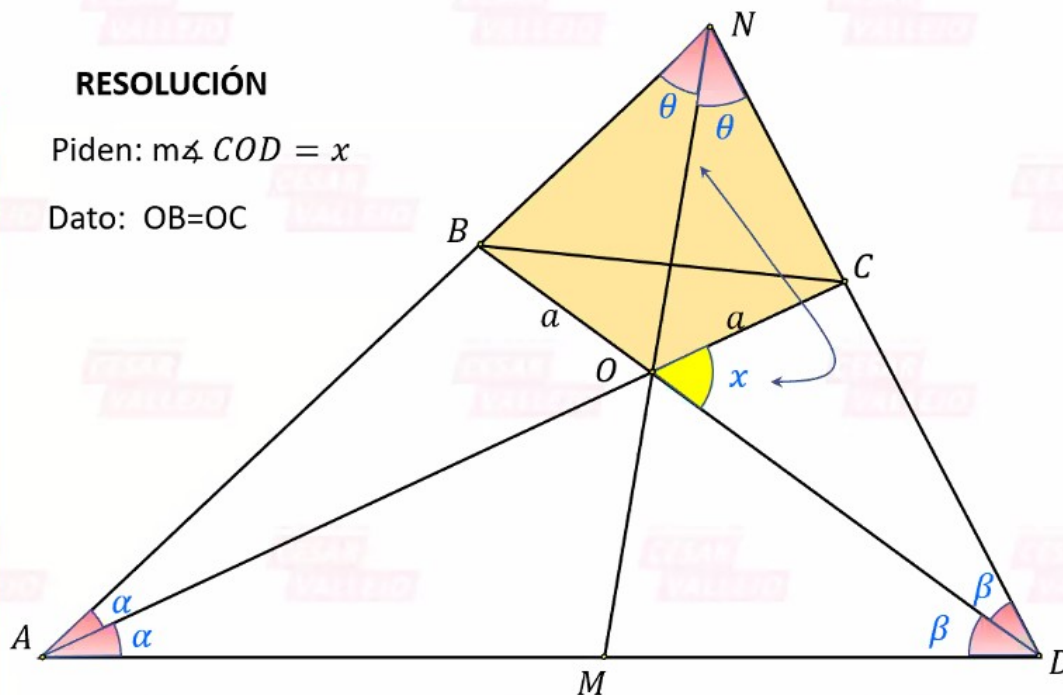
Debe decir son bisectrices del ángulo BAD
y ...



RESOLUCIÓN

Piden: $m\angle COD = x$

Dato: $OB = OC$



- Del teorema BNCO es inscriptible $\rightarrow m\angle BNC = x$
- En $\triangle AOD$: $x = \alpha + \beta$
- En $\triangle AND$: $2\alpha + 2\beta + x = 180^\circ$
 $\underbrace{2\alpha + 2\beta}_{2x}$

$$\therefore x = 60^\circ$$

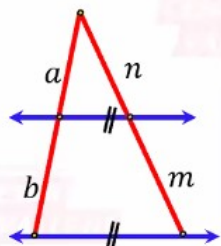
Clave: C

PROBLEMA 14

Dado un triángulo rectángulo ABC recto en B , se traza la ceviana $\overline{AM}$, luego en $\overline{AC}$ se ubica H tal que $\overline{MH} \perp \overline{AC}$. Si $m\angle BAM = m\angle BCA$, $AH = 4$ y $HC = 3$, calcule BC .

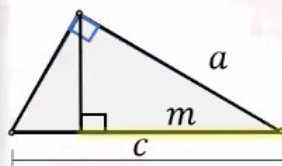
- A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{35}$ C) $\sqrt{14}$
D) $2\sqrt{7}$ E) $3\sqrt{7}$

Cororario de thales



Se cumple

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$

Teorema
producto de catetos

Se cumple

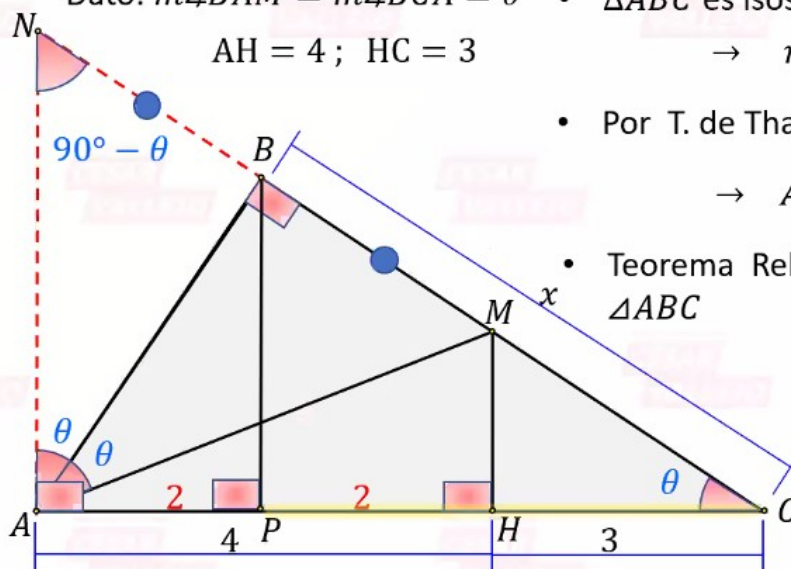
$$a^2 = m \cdot c$$

RESOLUCIÓN

Piden: $BC = x$

Dato: $m\angle BAM = m\angle BCA = \theta$

$AH = 4$; $HC = 3$



- Prolongar $\overline{MB}$ hasta N , tal que
 $\rightarrow NB = BM$

- $\triangle ABC$ es isósceles
 $\rightarrow m\angle ANM = 90^\circ - \theta$

- Por T. de Thales $\overline{AN} \parallel \overline{BP} \parallel \overline{HM}$
 $\rightarrow AP = PH = 2$

- Teorema Relaciones Métricas en $\triangle ABC$

$$x^2 = PC(AC)$$

$$x^2 = 5(7)$$

$$\therefore x = \sqrt{35}$$

Clave: B

